サークル資料　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　２０２３．６．１７

高見沢一男

黄金比：ファイ

「新しい数学ゲームパズル」　マーチンガードナー著　白揚社　第８章　　より

１　黄金比

第 38 図

黄金比。$A：B = A + B：A$

第３８図に示す線分をながめると、φ（ファイ）の幾何学的な意義がはっきりわかる。この線分は、”黄金比”と一般に呼ばれている比率に分割されている。すなわち、この線分全体（Ａ＋Ｂ）の部分線分Ａに対する比は、部分線分Ａの部分線分Ｂに対する比に等しく、どちらの比の値もφとなる。かりに線分Ｂの長さを１とすれば、φの数値はつぎの方程式から簡単に計算することができる。

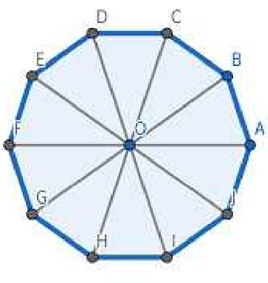
$\dfrac{A+1}{A} = \dfrac{A}{1}$　　この式は、$A^2 - A - 1 = 0$　という単純な形に書き直せるから、Ａを満足する正の数値はつぎのとおりに導きだされる。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

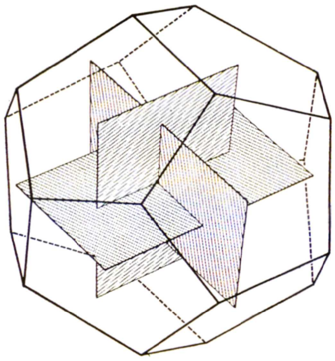
これがＡの長さであり、すなわちφの数値を示している。小数表示に直せば、1.61803398･･･　である。つぎに、Ａの長さの方をかりに１と考えてみよう。Ｂの長さはφの逆数（すなわち１／φ）になるわけであるが、おもしろいことに、この値は小数で表すと0.61803398･･･　になることがわかる。すなわち、φはあらゆる正の数のなかで、みずからから１を差し引くとみずからの逆数を生ずるような唯一の数値である。

２　図形と黄金比

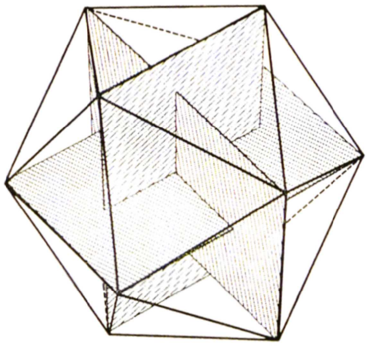
①円の半径のその内接正十角形の１辺に対する比の値はφである。



②また、３つの合同な”黄金長方形”（縦と横の比が黄金比を成す長方形）をたがいに対称的に交わらせ、しかもどの長方形もほかの２つの長方形のいずれとも垂直を成すように配置すると、これら３つの長方形の各頂点は、正二十面体の１２個の各頂点を構成し、また正十二面体の１２個ある面の各中心点をも構成する。

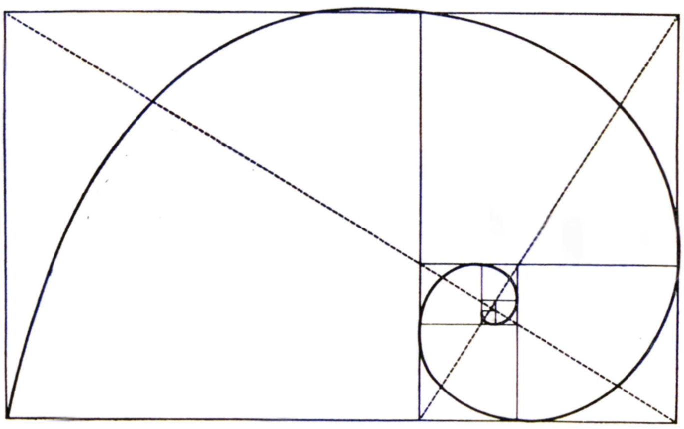


第 40 図
同じ３つの黄金長方形の頂点は，正十二面体の面の中心点と一致する。



第 39 図
３つの黄金長方形の頂点は，正二十面体の頂点と一致する。

③黄金長方形には多くの珍しい性質がそなわっている。その一端から一つの正方形を切り落としてみると、残った図形はやはり小さい黄金長方形になる。同様な正方形の切り落とし操作をさらに連続してほどこしてゆくと、第４１図に示すように次第に小さい黄金長方形が残されてゆく。相続いて生ずる各辺の黄金分割点のすべては、内方にむかってかぎりなく巻き込んでゆくひとつの対数うずまき線を描き出す。その極点は、点線で描かれた２本の対角線どうしの交点にあたる。もちろん、逆に次第に大きな正方形を順次書き加えてゆくことにより、外方にむかってもかぎりなく巻き出ることができる。



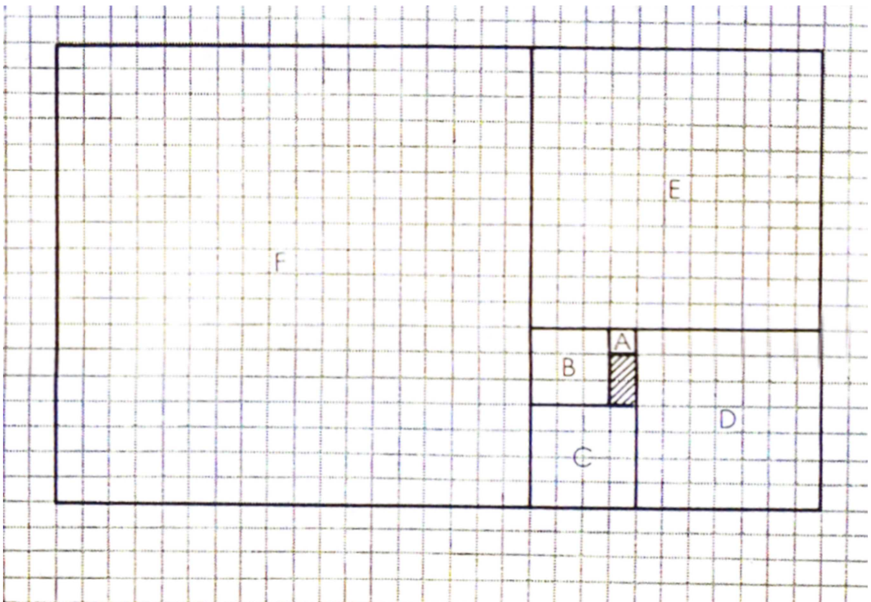
第 41 図
“旋回正方形群”によって描かれる対数うずまき線。

３　対数うずまき線とフィボナッチ数列

①フィボナッチの数列（１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，･･･）は、そのいずれの構成項もすぐ前に先行する２つの構成項の和に等しくできている。

②フィボナッチ数列の任意の隣接２項どうしの比の値は、数列が進むにつれて次第にϕに近接してゆく。たとえば、５／３はかなりϕに近い（縦横の比が３：５の分類用カードは、黄金長方形とほとんど区別がつかない)。つぎに、８／５ではもっとϕに近く、さらに２１／１３になると小数に直して１.６１９･･･であるから、これはなおいっそうϕに近い。じつは、好きかってな２つの数値を選定して、それらではじまる加法数列を作ってみると（たとえば、７，２，９，１１，２０，･･･)、いつでも同様な収束が起こるのである。数列が進むにつれて隣接する２つの構成項どうしの比の値は次第にϕに近づいてゆく。

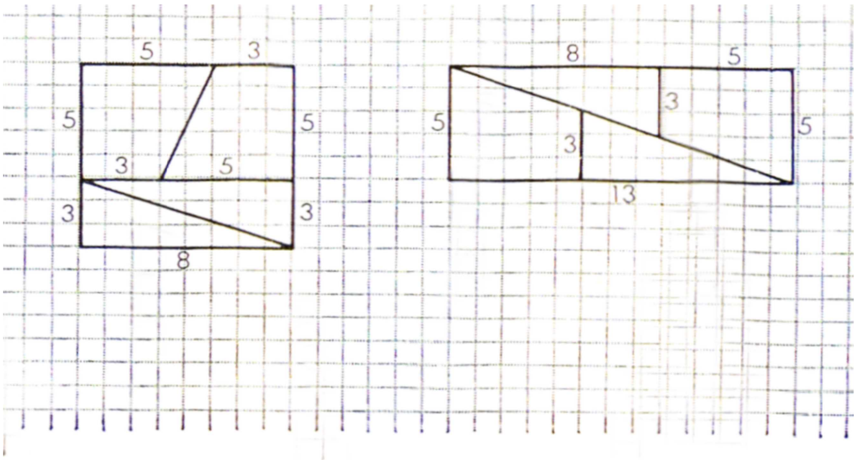
③対数うずまき線は、フィボナッチ数列と密接な関係を持っている。これは、旋回正方形群を使って手ぎわよく図示することができる。任意の寸法の２つの小正方形、たとえば第４３図に示すＡおよびＢとしるした２つの小正方形から出発してみよう。正方形Ｃの１辺の長さは、Ａの１辺とＢの１辺の長さの和に等しい。さらに、Ｄの辺はＢの辺とＣの辺の和に等しく、・・・以下同様である。この旋回正方形群は、最初の２つの正方形の寸法がどうであったにせよ、次第にひとつの黄金長方形を形成する方向に近づいてゆく。



第 43 図

ここに描かれた正方形群は，任意の加法数列内の隣接２項どうしの比がφにむかって収束することを図示している。

④ここで、ϕがフィボナッチ数列といかに密接な関係を持つかを強く印象づけてくれる、古典的なパラドックスをひとつ紹介しておこう。総計６４個の単位マスメで構成されたひとつの正方形を第４４図の左に示すように切り分けてみると、生じた４枚の断片を組み替えることによって、右図のような６５単位の大きさの長方形が作り出されるのである。



第 44 図

任意の加法数列の特性にもとづくパラドックス。

このパラドックスは、４枚の断片がじつは長い対角線ぞいに正確にはうまく組み合わさらず、そこに１単位マスメ分の面積に等しい細長くせまいすきまができるという事実によって説明される。図に示された諸線分の長さがフィボナッチの数列を成すことに注意していただきたい。じつは、正方形の切り分けにあたって、各断片の諸辺の長さが任意の加法数列の連続構成項に等しくなるようにあんばいすれば、いつでもこのパラドックスは演ずることができるのである。

⑤正方形をいくつかの断片に切り離して作った組み替え長方形に面積の増減が生じないようくふうする唯一の方法は、断片を構成する諸辺の長さを１、ϕ、$\phi+1$、$2\phi+1$、$3\phi+2$、・・・という加法数列に対応して定めることである。この数列はまた、１、ϕ、ϕ^2、ϕ^3、ϕ^4、・・・という形で書いてもよい。これは任意の隣接２項どうしの比の値が定数となるような唯一の加法数列である（この定数はもちろんϕ）。そしてまた、すべての加法数列が接近につとめながら、しかもそう成りきることができないところの黄金数列である。

$$\phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$$

$$\phi^3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5} = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times (2+\sqrt{5}) = \frac{7+\sqrt{5}}{2} = 3\phi + 2$$