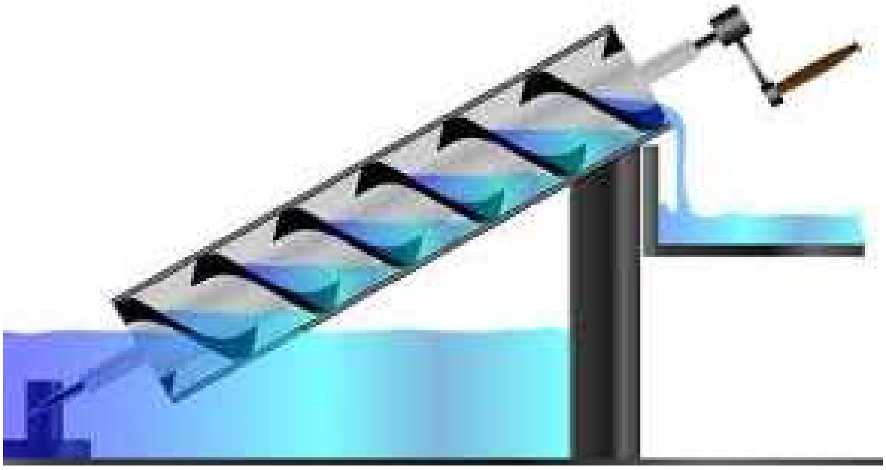
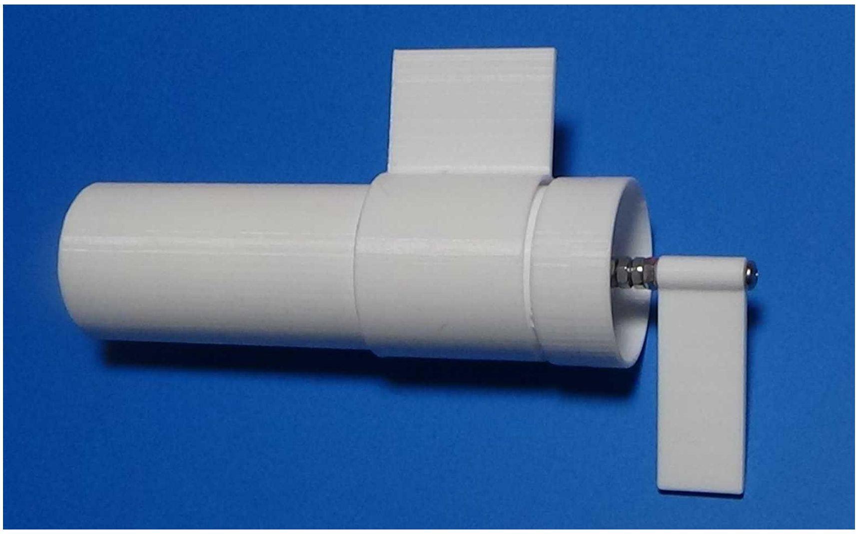
アルキメデスポンプ　（アルキメデスのらせん）



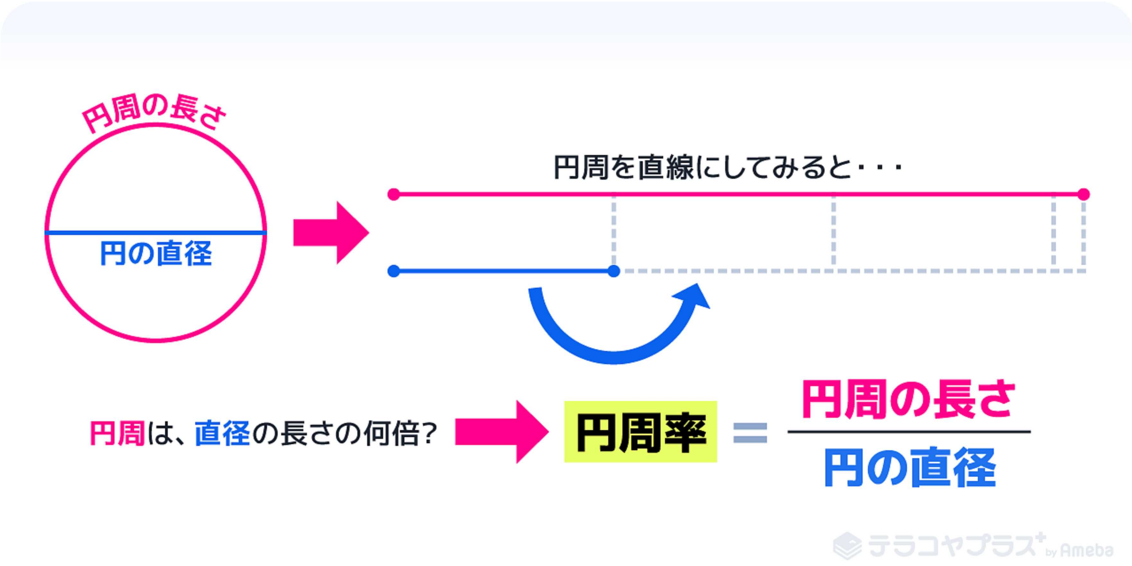
アルキメデスポンプは、今から2300年くらい前に古代ギリシアのアルキメデスが考えたといわれる発明です。
パイプの中には軸（じく）があって、らせんとなったうすい板がついています。この軸をクルクル回すと水がそのらせんにすくわれて、しだいに上まで運ばれるしくみです。アルキメデスポンプは、今でもコンクリートミキサーの中などに使われています。

３Ｄプリンタで作ったアルキメデスポンプで、水をくみ上げてみましょう。



アルキメデスの円周率の求め方

円周率は「円周の長さは、円の直径の長さの何倍か」ということを表しています。



1　直径１０ｃｍの円盤を方眼紙の上で１回転させて、円周の長さを測ってみましょう。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ｃｍ

2　円盤のゆがみや、定規の測る位置の違いなどで答えがまちまちだと困ります。きちんとした倍率（円周率）は、４０００年以上前から人類が知りたいと思ってきたことです。

　アルキメデスは現在の私たちが使っている、円周率＝3.14という値を２３００年前に見つけていました。その方法をたどってみましょう。

①　円の中に作った正方形と、円の外に作った正方形の辺の長さを比べます。

　中の正方形＿＿＿＿＿ｃｍ　　外の正方形＿＿＿＿＿ｃｍ

②　円の中に作った正６角形と、円の外側に作った正６角形の辺の長さを比べます。

　中の６角形＿＿＿＿＿ｃｍ　　外の６角形＿＿＿＿＿ｃｍ

③　円の中に作った正１２角形と、円の外側に作った正１２角形の辺の長さを比べます。

中の１２角形＿＿＿＿＿ｃｍ　　外の１２角形＿＿＿＿＿ｃｍ

④　円の中に作った正２４角形と、円の外側に作った正２４角形の辺の長さを比べます。

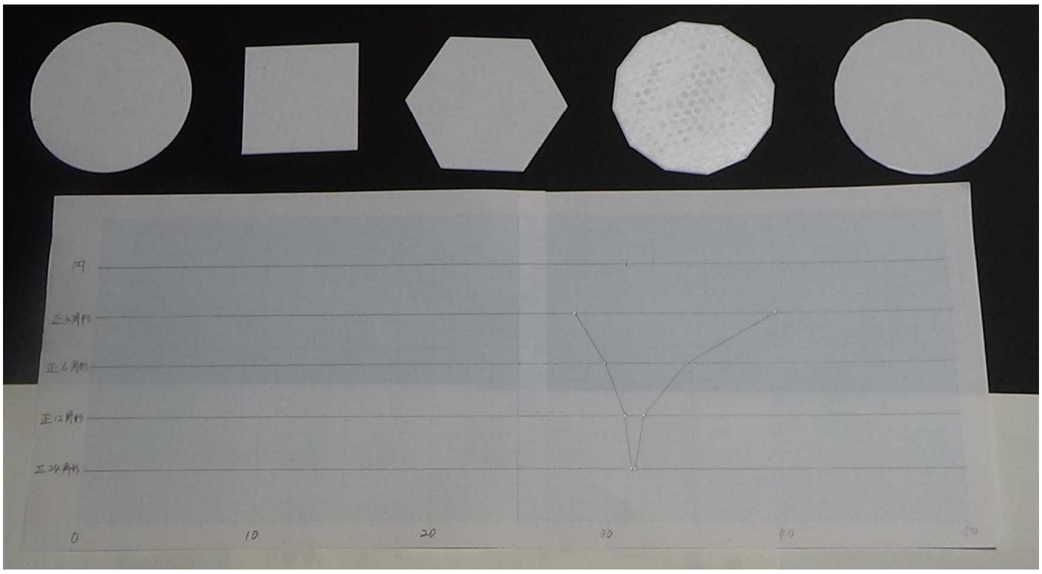
中の２４角形＿＿＿＿＿ｃｍ　　外の１２角形＿＿＿＿＿ｃｍ

正多角形の角を多くすると、だんだんと中と外の辺の長さが近づいてきます。アルキメデスは、このあと正４８角形、正９６角形についても調べて、円周率を３つめの数字まで正確に求めました。その後いろいろと工夫されながら、今では８０００兆番目の数字まで求められています。

（円周率の本当の値は　３.１４１５９２・・・と無限に続く数字になります。数字３つ目まで正確な値を求めたアルキメデスはすごいですね。）

アルキメデスの求めた値

	中の辺の長さ	外の辺の長さ
正１２角形	31.05 ｃｍ	32.15 ｃｍ
正２４角形	31.32 ｃｍ	31.59 ｃｍ
正４８角形	31.39 ｃｍ	31.46 ｃｍ
正９６角形	31.41 ｃｍ	31.42 ｃｍ



円周率πを計算する
-アルキメデス，和算，ガウスの方法-

上越教育大学 中川仁

平成20年9月3日，10日，17日，24日，10月1日

2 アルキメデスの方法

2.1 円に内接・外接する正多角形

Nを自然数とする．半径1の円に内接する正N角形の一辺の長さを$2a$，外接する正N角形の一辺の長さを$2b$とする．同様に，半径1の円に内接する正$2N$角形の一辺の長さを$2a'$，外接する正$2N$角形の一辺の長さを$2b'$とする．これを図示すると次のような図になる．

図7において，$\angle OBA = \angle EBD$であるから，直角三角形OABと直角三角形EDBは相似である．$OA = 1$, $ED = AE = b'$, $AB = b$であるから，

$$OA : ED = AB : DB, \quad 1 : b' = b : DB, \quad DB = bb'. \tag{3}$$

$\angle ODC = \angle EBD$であるから，直角三角形OCDと直角三角形EDBは相似である．$OD = 1$, $EB = AB - AE = b - b'$, $CD = a$より，

$$OD : EB = CD : BD, \quad 1 : (b - b') = a : BD, \quad BD = a(b - b'). \tag{4}$$

(3)と(4)から，$bb' = a(b - b')$, $b'(a + b) = ab$, したがって，

$$b' = \frac{ab}{a + b}. \tag{5}$$

次に，$\angle OAF = \angle DAC$であるから，直角三角形OFAと直角三角形DCAは相似である．$OA = 1$, $DA = 2FA = 2a'$, $AF = a'$であるから，

$$OA : DA = AF : AC, \quad 1 : 2a' = a' : AC, \quad AC = 2a'^2. \tag{6}$$

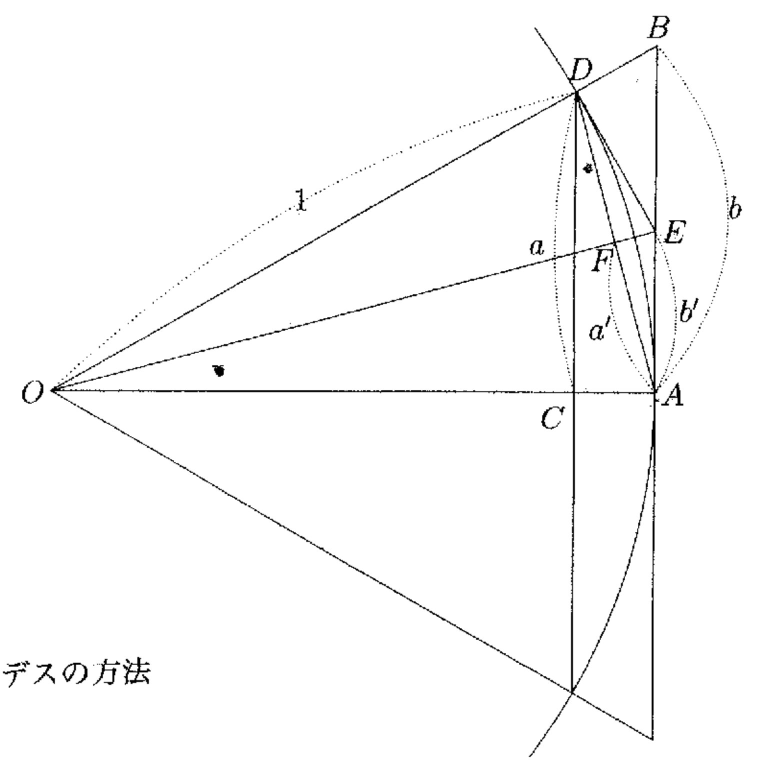


図7: アルキメデスの方法

さらに，$\angle EOA = \angle AOF$ であるから，直角三角形 OAE と直角三角形 OFA は相似である．よって，直角三角形 OAE と直角三角形 DCA は相似である．$OA = 1$, $DC = a$, $AE = b'$ より，

$$OA : DC = AE : CA, \quad 1 : a = b' : CA, \quad CA = ab'. \tag{7}$$

(6) と (7) から，$2a'^2 = ab'$, したがって，

$$a' = \sqrt{\frac{ab'}{2}}. \tag{8}$$

内接正 N 角形の周の長さの半分を p_N，外接する正 N 角形の周の長さの半分を q_N とすれば，$p_N = Na$, $q_N = Nb$, $p_{2N} = 2Na'$, $q_{2N} = 2Nb'$ である．したがって，$a = p_N/N$, $b = q_N/N$, $a' = p_{2N}/(2N)$, $b' = q_{2N}/(2N)$ を (5), (8) に代入すれば，次の命題を得る．

命題 1.

$$q_{2N} = \frac{2p_N q_N}{p_N + q_N} \quad (p_N \text{ と } q_N \text{ の調和平均}),$$
$$p_{2N} = \sqrt{p_N q_{2N}} \quad (p_N \text{ と } q_{2N} \text{ の幾何平均}).$$

アルキメデスは，正6角形から出発して，辺の数が2倍にして，正12角形, 正24角形, 正48角形，正96角形，正192角形，について計算した．$p_6 = 3$, $q_6 = 2\sqrt{3}$ である．命題1より，

$$q_{12} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 12(2 - \sqrt{3}),$$
$$p_{12} = \sqrt{3 \cdot 12(2 - \sqrt{3})} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

これを繰り返して小数で計算すれば，$p_N < \pi < q_N$ より，

$$\begin{aligned}
n = 12, &\quad 3.1058\cdots < \pi < 3.2153\cdots, \\
n = 24, &\quad 3.1326\cdots < \pi < 3.1596\cdots, \\
n = 48, &\quad 3.1393\cdots < \pi < 3.1460\cdots, \\
n = 96, &\quad 3.1410\cdots < \pi < 3.1427\cdots, \\
n = 192, &\quad 3.1414\cdots < \pi < 3.1418\cdots.
\end{aligned}$$

円周率 π の値として，正 96 角形の計算から，3.14 まで，正 192 角形の計算から，3.141 までわかる．

練習問題 3. 電卓を用いて，命題1の公式から，p_N, q_N を $N = 12, 24, 48, 96, 192$ について計算してみよう．